N. B. — 1° L'emploi de tout livre, exception faite des tables de logarithmes et des tables de fonctions (Flavien, Hennequin et Laborde), et de tout appareil à calculer, exception faite des règles et des cercles à calcul, est interdit à cette épreuve.

2° Dans le problème qui suit interviennent divers développements limités, *à coefficients tous rationnels*, de fonctions réelles d'une variable réelle x. Il est précisé une fois pour toutes :

a. Qu'une fonction f à valeurs réelles, de la variable réelle x, définie dans un voisinage de 0, admet un développement limité selon les puissances de x, à l'ordre m, si et seulement si l'on peut écrire l'égalité :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + x^m . \varepsilon(x)$$

où ε est une fonction de x telle que $\varepsilon(x) \to 0$ si $x \to 0$;

b. Que tous les coefficients des développements utilisés devront être donnés sous forme de fractions irréductibles. *En aucun cas les candidats n'auront à calculer de valeurs décimales approchées de ces fractions.* Ils sont par contre avertis qu'une somme de fractions non effectuée ne pourra être considérée comme un résultat valable par le correcteur.

3° Le symbole Log x désigne le logarithme népérien de x.

4° Les questions 3°, 4° et 5° peuvent se traiter indépendamment des questions 1° et 2°.

1° Calculer le développement limité à l'ordre 7 de tg x selon les puissances de x.

2° Déduire du résultat précédent :

a. Le développement limité de $\text{tg}^3 x$ à l'ordre 6, selon les puissances de x;

b. Le développement limité de Log cos x à l'ordre 8, selon les puissances de x.

3° On pose :

$u(x) = \dfrac{x}{\sin x}$ si $x \neq k\pi$, k désignant un entier relatif;

$u(0) = 1$.

u est donc définie et continue pour tout x, sauf pour $x = k\pi$, k désignant un entier relatif non nul. Elle est notamment définie dans l'intervalle ouvert $]-\pi, +\pi[$.

Calculer le développement limité à l'ordre 6 de $u(x)$, selon les puissances de x.

4° On pose $v(x) = u^3(x)$, pour tout x tel que $u(x)$ soit défini.

Calculer, en utilisant le résultat du 3°, le développement limité à l'ordre 6 de $v(x)$, selon les puissances de x.

5° On pose :

$$w(x) = \frac{x^3}{\text{sh}^3 x} \text{ si } x \neq 0,$$

$$w(0) = 1.$$

w est donc définie et continue pour tout x.

Déduire du résultat du 4° le développement limité à l'ordre 6 de $w(x)$ selon les puissances de x.

6° On pose, a, b, c, d désignant quatre nombres réels, et en supposant que $|x| < \dfrac{\pi}{2}$,

$$f(x) = u(x) + a \text{ Log cos } x + b w(x) + c \text{ tg}^2 x + d,$$

où $u(x)$ et $w(x)$ ont les significations précisées respectivement aux questions 3° et 5°.

On se propose de déterminer a, b, c, d de façon que $f(0) = 0$ et que, lorsque $x \to 0$, $f(x)$ soit un infiniment petit d'ordre le plus élevé possible, x étant pris pour infiniment petit principal.

Écrire le système d'équations linéaires que doivent vérifier a, b, c, d.

Calculer a, b, c, d et vérifier que le problème posé admet une solution unique.

Les valeurs de a, b, c, d seront données sous forme de fractions irréductibles. Aucun calcul de valeur décimale approchée de ces fractions n'est demandé.

Il est signalé que 2 389 est un entier naturel premier.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail